

Übung zur Vorlesung
Maschinelles Lernen

Wintersemester 2013/2014
Blatt 6

In dieser Woche sollen Sie Ihre einfache Implementierung der SVM Schrittweise zu einer vereinfachten Ball Vector Machine erweitern.

Sie können dazu den Rahmen von Blatt 3 verwenden. Die Implementierung wird dabei in 3 Teile aufgeteilt. Diese Woche sollen die ersten zwei Teile implementiert werden.

Aufgabe 1

5 Punkte

Implementieren Sie folgenden Algorithmus $A(X, r, \epsilon)$, der zu einer Menge von Punkten $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, mit $\forall i : x_i \in \mathbb{R}^d$ (Euklidischer Vektorraum), eine $(1 + \epsilon)$ -Approximation des *enclosing ball* $EB(c, r)$ bei einem gegebenen Radius r und Schwellwert ϵ berechnet.

1. $t = 0$
2. Wähle einen initialen Mittelpunkt c_0 (siehe Folie 27)
3. $t = t + 1$
4. Finde den am weitesten entfernten Punkt (Euklidische Distanz) von c_t , der außerhalb des Balls liegt ($\|c_t - x_t\|_2 > (1 + \epsilon)r$).
5. Es wurde kein Punkt gefunden $\Rightarrow$ STOPP
6. Es wurde ein Punkt x_t gefunden $\Rightarrow$
Verschiebe c_{t-1} solange auf der Strecke zwischen c_{t-1} und x_t , dass x_t auf dem Rand des Balls liegt. Der durch die Verschiebung gefundene Punkt ist c_t .
7. Gehe zu Schritt 3.

Folgende Informationen sollen nach der Durchführung von $A(X, r, \epsilon)$ zur Verfügung stehen:

1. Der Mittelpunkt c_t
2. Alle Punkte $X_B \subset X$, mit $X_B = \{x_i \mid \|x_i - c\| = r\}$

Erzeugen sie sich mit RapidMiner Daten $X \subset \mathbb{R}^2$ mit $\#X = N \sim 10$ und testen Sie darauf ihren Algorithmus. Wählen Sie für ihre Experimente verschiedene Startpunkte und Radien. Wählen Sie $\epsilon = \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$

1. Wie unterscheiden sich die gefundenen Mittelpunkte der EBs für verschiedene Startpunkte, Radien und ϵ ?
2. Wie unterscheiden sich die gefundenen X_B voneinander?
3. Terminiert der Algorithmus immer?
4. Wie würden Sie den Algorithmus erweitern, so dass dieser immer terminiert?

Aufgabe 2

5 Punkte

In dieser Aufgabe soll der Algorithmus aus Aufgabe 1 für die Lösung einer speziellen Instanz der Ball Vector Maschine eingesetzt werden.

Aus der Vorlesung sind der Kernel und die Feature-Map für den 1-Klassen-Fall bekannt (Siehe Folie 20). Für 2 Klassen verändern sich diese zu

$$\tilde{k}(z_i, z_j) = y_i y_j k(x_i, x_j) + y_i y_j + \frac{\delta_{ij}}{C}$$

mit Kronecker-Delta δ_{ij} und $z_i = (x_i, y_i)$ und

$$\tilde{\phi}(z_i) = \begin{bmatrix} \phi(x_i) \\ y_i \\ \frac{1}{\sqrt{C}} e_i \end{bmatrix}$$

mit dem N-dimensionalen i-ten Einheitsvektor, also $\text{length}(e_i) = \#X_i = N$.

Damit der Algorithmus $A(X, r, \epsilon)$ aus Aufgabe 1 angewendet werden kann, müssen die Daten X vor Anwendung des Algorithmus angepasst werden:

1. Normieren Sie die Punkte: $x'_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}, \forall x_i \in X$
2. Erweitern Sie die Punkte x'_i zu $x_i^* = \begin{bmatrix} x'_i \\ y_i \\ \frac{1}{\sqrt{C}} e_i \end{bmatrix}, \forall x_i \in X'$

Wiederholen Sie die Experimente aus Aufgabe 1 und verwenden Sie als Radius $\sqrt{2 + \frac{1}{C}}$, $\epsilon = 10^{-6}$ und $C = \{1, 256, 4096\}$ (Siehe Folie 31).

1. Welches Verhalten können Sie beobachten?
2. Überlegen Sie: Aufgabe 2 liefert eine Lösung für die lineare SVM mit Hilfe des Algorithmus aus Aufgabe 1.