

Logik

- Gute Gründe, etwas für wahr zu halten, sind nach Euler:
das Zeugnis der Sinne
das Zeugnis glaubwürdiger Personen
ein richtiger Schluß.
- Lösung eines Problems ohne dessen sinnliche Anschauung,
einzig anhand der Form der Problembeschreibung --> Logik.
- Wann sind zwei Formen eigentlich gleich?
- Welche Formen können aus einer Menge von Formen abgeleitet werden?

„eigentlich gleich“

- Überführen einer Form in eine andere durch wahrheitserhaltende Manipulationen
- „eigentlich gleich“ heißt: gleicher Wahrheitswert!

Forme(l)n

Syntax (griechisch: Anordnung)
verabredete Zeichen in verabredeter Anordnung

Bedeutung

- Bezeichner bedeuten Bezeichnetes
z.B. „Löwe“ bedeutet 
- Aussage bedeutet Wahrheitswert
z.B. „Baum hat Blätter“, „Uta ist 1,68 m groß“

Sinn

- Hoffnungen, Wünsche, Befürchtungen haben keine Bedeutung, aber Sinn.

Aussagenlogik

Syntax

- Wahrheitswerte, Aussagensymbole sind Formeln
- Sind A und B Formeln, so auch:
 $\neg A$, $A \& B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$
- Das sind alle Formeln.

Semantik

- Nur Bedeutung, Sinn ist nicht formalisiert.

Wahrheit

- Belegung einer Formel A:
Abbildung einer Formel auf {w,f}
- Auswertung einer Formel A:
Ist A wahr unter einer Belegung?
Wahrheitstafeln anwenden!
- Eine Formelmeng X ist unter einer Belegung wahr, wenn jede Formel der Menge unter der Belegung wahr ist.

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \equiv A \rightarrow B \ \& \ B \rightarrow A$$

$\neg$	w	f
	f	w

&	w	f
w	w	f
f	f	f

$\vee$	w	f
w	w	w
f	w	f

Awahr	$\vee$	Ewahr	$\vee$	Fwahr	$\vee$	Gwahr
Awahr	$\leftrightarrow$	Eball				
Ewahr	$\leftrightarrow$	Gball				
Fwahr	$\leftrightarrow$	$\neg$	Fball			
Gwahr	$\leftrightarrow$	$\neg$	Ewahr			
Awahr	$\rightarrow$	$\neg$	Ewahr	&	$\neg$	Fwahr
Ewahr	$\rightarrow$	$\neg$	Awahr	&	$\neg$	Fwahr
Fwahr	$\rightarrow$	$\neg$	Awahr	&	$\neg$	Ewahr
Gwahr	$\rightarrow$	$\neg$	Awahr	&	$\neg$	Ewahr
Aball	$\rightarrow$	$\neg$	Eball	&	$\neg$	Fball
Eball	$\rightarrow$	$\neg$	Aball	&	$\neg$	Fball
Fball	$\rightarrow$	$\neg$	Aball	&	$\neg$	Eball
Gball	$\rightarrow$	$\neg$	Aball	&	$\neg$	Eball
Aball	$\vee$	Eball	$\vee$	Fball	$\vee$	Gball

Belegungen

Wann ist die Formel wahr?

Gwahr	$\rightarrow$	$\neg$	Awahr	&	$\neg$	Ewahr	&	$\neg$	Fwahr
f	$\rightarrow$	$\neg$	w	&	$\neg$	f	&	$\neg$	f
f	$\rightarrow$	$\neg$	f	&	$\neg$	w	&	$\neg$	f
f	$\rightarrow$	$\neg$	f	&	$\neg$	f	&	$\neg$	w
f	$\rightarrow$	$\neg$	f	&	$\neg$	f	&	$\neg$	f
w	$\rightarrow$	$\neg$	f	&	$\neg$	f	&	$\neg$	f

Was passiert mit allen anderen Formeln, wenn Gwahr wahr ist?

Widerspruchsbeweis -- Beispiel

Gibt es Belegungen, so dass Awahr w ist und alle Formeln sind w? Nein!

Awahr	$\rightarrow$	$\neg$	Ewahr	&	$\neg$	Fwahr	&	$\neg$	Gwahr
w	w	w	f	w	w	f	w	w	f
Gwahr	$\leftrightarrow$	$\neg$	Ewahr						
f	f	w	f						

Awahr kann nicht gelten.

Anne hat gelogen.

solve

```
solve(1).  
solve(0):-!, fail.  
solve(neg(A)):-not(solve(A)).    %Verknüpfungen definieren  
solve(and(A,B)):-solve(A),solve(B).  
solve(or(A,B)):-solve(A) ; solve(B).  
...  
  
solve([]).                        % Menge von Formeln testen  
solve([Erst|Rest]):-  
    solve(Erst),  
    solve(Rest).
```

instantiate

```
instantiate([]).  
instantiate([1|Liste]):-instantiate(Liste).  
instantiate([0|Liste]):-instantiate(Liste).  
  
?-instantiate([A,B]).  
    A = B = 1 ;  
    A = 1, B = 0 ;  
    A = 0, B = 1 ;  
    A = B = 0 ;  
    no
```

Welche Belegungen machen alle Formeln wahr?

Alle Belegungen für alle atomaren Formeln in allen Kombinationen
durchprobieren!

2^8 Belegungen!

Eine Formelmenge heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung für alle
Aussagensymbole gibt, so daß alle Formeln wahr sind.

ballerfuellen:-

Atoms = [Awahr, Ewahr, Fwahr, Gwahr, Aball, Eball, Fball, Gball],

Formel = [equi(Awahr, Eball),...], %hier alle Formeln hinschreiben!

instantiate(Atoms),

solve(Formel),

write(Atoms),nl,fail.

Formelmenge X ist

erfüllbar, gdw.

es gibt eine Belegung, so daß alle Formeln von X wahr werden.

allgemeingültig, gdw.

unter allen Belegungen sind alle Formeln von X wahr.

aus einer Formelmenge Y folgerbar, d.h. $Y \models X$, gdw.

unter allen Belegungen, unter denen Y wahr ist,

ist auch jede Formel aus X wahr

Logische Folgerung ist

- transitiv: $X \models Y, Y \models Z$, so auch $X \models Z$
- reflexiv: $X \supseteq Y$, so $X \models Y$
- monoton: $X \supseteq Y, Y \models Z$, so auch $X \models Z$
- Damit $A \rightarrow B$ wahr ist, braucht man eine entsprechende Belegung für A und B.
- Damit $A \models B$ wahr ist, müssen alle Belegungen geprüft werden.

Wahrheitserhaltende Manipulationen

$$A \leftrightarrow B \Rightarrow (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$$

w	w	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w

$$\neg(A \& B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \& \neg B$$

$$A \vee (B \& C) \Rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$$

Widerspruchsbeweis

Statt aus A logisch B zu folgern, kann man auch aus A und $\neg B$ einen Widerspruch beweisen und deshalb die Annahme $\neg B$ verwerfen.

$A \models B$ ist identisch mit $A \rightarrow B$ ist allgemeingültig

Wenn $A \& \neg B \rightarrow f$ eigentlich dasselbe bedeutet wie $A \rightarrow B$, dann ist ein Widerspruchsbeweis ein ordentlicher Beweis.

Wahrheitserhaltende Manipulationen:

A	$\rightarrow$	B	A	$\rightarrow$	B	$\vee$	f	A	$\&$	$\neg$	B	$\rightarrow$	f
w	w	w	w	w	w	w	f	w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	w	w	f	f	f	f	w	w	f
f	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	f	w	f